1 Теоремы Вейерштрасса.

1.1 Теорема Вейерштрасса в конечномерном пространстве.

Задачу минимизации функции $J(u)$ на множестве U пространства M будем записывать в виде

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \subset M. \quad (1)$$

Искомыми величинами в задаче (1) обычно считаются нижняя грань $J_* = \inf_{u \in U} J(u)$, множество всех оптимальных решений $U_* = \{u \in U \mid J(u) = J_*\}$ или один из оптимальных элементов $u_* \in U_*$.

Теорема. (Классическая теорема Вейерштрасса в конечномерном пространстве)

Пусть $J(u)$ — функция, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве U n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $J(u)$ достигает своих точной верхней и точной нижней грани на множестве U .

Определение. Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется минимизирующей последовательностью для задачи (1), если $u_n \in U, n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = J_*$.

Определение. Функция $J(u)$, определённая на множестве U пространства $\mathbb{R}^n$, называется полунепрерывной снизу в точке u_0 этого множества, если для любой сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества U выполнено предельное соотношение

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \geq J(u_0).$$

Теорема. (Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани)

Пусть $J(u)$ — функция, полунепрерывная снизу на замкнутом и ограниченном множестве U n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда в задаче (1) нижняя грань конечна: $J_* > -\infty$, множество оптимальных решений непусто: $U_* \neq \emptyset$, и любая минимизирующая последовательность сходится к множеству U_* , т.е. $\inf_{u \in U_*} \|u_n - u\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

1.2 Теорема Вейерштрасса в метрических пространствах.

Определение. Пространство M называется метрическим, если на нем введен функционал $\rho(\cdot, \cdot) : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^1$, обладающий следующими свойствами:

1. $\rho(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in M, \quad \rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
2. $\rho(u, v) = \rho(v, u) \quad \forall u, v \in M$;
3. $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v) \quad \forall u, v, w \in M$.

Этот функционал ρ называется метрикой пространства M .

Определение. Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов метрического пространства M с введённой на нем метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ называется сильно сходящейся (ρ -сходящейся) к элементу u этого пространства, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(u_n, u) = 0$.

Определение. Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов метрического пространства M называется фундаментальной, если $\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \rho(u_m, u_n) = 0$.

Определение. Метрическое пространство $\mathbb{M}$ называется **полным**, если для любой фундаментальной последовательности его элементов $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ найдется такой элемент $u \in \mathbb{M}$, что она сходится к нему.

Определение. Функционал $J(u) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется **непрерывным** / **полу непрерывным снизу** / **{ полу непрерывным сверху }** в точке u_0 , если для любой сильно сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = J(u_0) \quad [\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \geq J(u_0)] \quad \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \leq J(u_0) \}.$$

Определение. Множество M из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется **компактным**, если из любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ его элементов можно выделить подпоследовательность, **сильно** сходящуюся к некоторому элементу $u \in M$.

Теорема. (Метрический вариант теоремы Вейерштрасса)

Пусть U – компактное множество из метрического пространства $\mathbb{M}$, функционал $J(u)$ определен, принимает конечные значения и полунепрерывен снизу на U . Тогда :

1. $J_* > -\infty$,
2. U_* непусто и компактно,
3. Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **сильно** сходится к множеству U_* (т.е. множество U_* содержит все её предельные точки).

1.3 Теорема Вейерштрасса в гильбертовых пространствах.

Определение. Линейное пространство $\mathbb{H}$ называется **нормированным**, если на нем введен функционал $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^1$, обладающий следующими свойствами:

1. $\|h\| \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{H}, \|h\| = 0 \Leftrightarrow h = \Theta_{\mathbb{H}}$;
2. $\|h_1 + h_2\| \leq \|h_1\| + \|h_2\| \quad \forall h_1, h_2 \in \mathbb{H}$;
3. $\|\lambda h\| = |\lambda| \cdot \|h\| \quad \forall h \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}^1$.

Этот функционал называется **нормой** пространства $\mathbb{H}$.

Замечание. Любое нормированное пространство является также и метрическим с метрикой $\rho(u, v) = \|u - v\|$. Эту метрику называют метрикой, порождённой нормой.

Определение. Нормированное пространство, полное относительно метрики, порождённой введённой на нем нормой, называется **банаховым**.

Определение. Линейное пространство $\mathbb{H}$ называется **евклидовым**, если на нем введён функционал $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^1$, обладающий следующими свойствами:

1. $\langle h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{H}, \langle h, h \rangle = 0 \Leftrightarrow h = 0_{\mathbb{H}}$;
2. $\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_2, h_1 \rangle \quad \forall h_1, h_2 \in \mathbb{H}$;
3. $\langle h_1 + h_2, h_3 \rangle = \langle h_1, h_3 \rangle + \langle h_2, h_3 \rangle \quad \forall h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{H}$.
4. $\langle \lambda h_1, h_2 \rangle = \lambda \langle h_1, h_2 \rangle \quad \forall h_1, h_2 \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}^1$.

Этот функционал называется **скалярным произведением** в пространстве $\mathbb{H}$.

Замечание. Любое евклидово пространство является также и нормированным с нормой $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$. Эта норма называется нормой, порождённой скалярным произведением.

Определение. Евклидово пространство, полное относительно метрики, порождённой введённым на нем скалярным произведением, называется **гильбертовым**.

Теорема. Для того, чтобы нормированное пространство $\mathbb{H}$ было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для двух произвольных его элементов f и g выполнялось соотношение $\|f + g\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f - g\|_{\mathbb{H}}^2 = 2\|f\|_{\mathbb{H}}^2 + 2\|g\|_{\mathbb{H}}^2$.

Определение. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов евклидова пространства $\mathbb{H}$ с введённым на нем скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ называется **слабо сходящейся** к элементу f этого пространства, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, h \rangle_{\mathbb{H}} = \langle f, h \rangle_{\mathbb{H}} \forall h \in \mathbb{H}$.

Определение. Функционал $J(u) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется **слабо непрерывным** / **слабо полунепрерывным снизу** / **{ слабо полунепрерывным сверху }** в точке u_0 , если для любой слабо сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = J(u_0) \quad [\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \geq J(u_0)] \quad \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \leq J(u_0) \}.$$

Определение. Функционал $J(h) : H \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется **выпуклым** / **вогнутым** / на множестве H , если выполнено условие

$$J(\alpha h_1 + (1 - \alpha)h_2) \leq [\geq] \alpha J(h_1) + (1 - \alpha)J(h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in H, \alpha \in [0, 1].$$

Теорема. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ из выпуклости и полунепрерывности снизу функционала на некотором множестве вытекает его слабая полунепрерывность на этом множестве.

Определение. Множество M из линейного пространства $\mathbb{L}$ называется **выпуклым**, если для любых двух точек u и v из этого множества и любого $\alpha \in [0, 1]$ точка $\alpha u + (1 - \alpha)v$ также лежит в множестве M .

Определение. Множество M из нормированного пространства $\mathbb{X}$ называется **ограниченным**, если существует такое положительное число R , что $\|x\|_{\mathbb{X}} \leq R \forall x \in M$.

Определение. Множество M из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества M , **сильно сходящейся** к некоторому элементу u , выполнено $u \in M$.

Определение. Множество M из евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется **слабо замкнутым**, если оно содержит все свои **слабые** предельные точки, т.е. для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества M , **слабо сходящейся** к некоторому элементу u , выполнено $u \in M$.

Теорема. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ из выпуклости и замкнутости множества вытекает его слабая замкнутость.

Определение. Множество H из евклидова пространства $\mathbb{H}$ называется **слабо компактным**, если из любой последовательности $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty}$ его элементов можно выделить подпоследовательность, **слабо сходящуюся** к некоторому его элементу h .

Теорема. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ из выпуклости, ограниченности и замкнутости множества вытекает его слабая компактность.

Теорема. (Слабый вариант теоремы Вейерштрасса)

Пусть U – слабо компактное множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, функционал $J(u)$ определен и слабо полунепрерывен снизу на U . Тогда :

1. $J_* > -\infty$,
2. U_* непусто и слабо компактно,
3. Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **слабо сходится** к множеству U_* (т.е. множество U_* содержит все ее слабые предельные точки).

- Показать, что если функционал $\rho(\cdot, \cdot) : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет паре свойств:
 - $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
 - $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(v, w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{M}$,
 то пространство $\mathbb{M}$ является метрическим, а функционал ρ будет его метрикой.
- Пусть $\rho(x, y)$ — метрика пространства $\mathbb{M}$, полного относительно неё. Доказать, что функционалы

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad \rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y)), \quad \rho_3(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$$

также будут являться метриками пространства $\mathbb{M}$. Будет ли оно полным относительно этих метрик?

- Проверьте, будут ли указанные функционалы нормами данных пространств. В случае положительного ответа выясните, будут ли данные пространства полными относительно метрик, порожденных этими нормами:

- $\|x\|_{\ell^2}$ в ℓ^1 ;
- $\|x\|_{\ell^1}$ в ℓ^2 ;
- $\|f\|_{L^2(a,b)}$ в $L^1(a, b)$;
- $\|f\|_{L^1(a,b)}$ в $L^2(a, b)$;
- $\|f\|_{C[a,b]}$ в $L^1(a, b)$ или $L^2(a, b)$?

- Является ли функционал $n(x) = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n}\right)^2}$ нормой в ℓ^2 ?

- Является ли функционал $n(f) = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ нормой в $C[-1, 1]$?

- Проверьте, будут ли указанные функционалы скалярными произведениями в данных пространствах. В случае положительного ответа выясните, будут ли данные пространства полными относительно метрик, порожденных этими скалярными произведениями:

- $s(f, g) = \int_0^1 f(t)g(1-t) dt$ в $L^2(0, 1)$;
- $s(f, g) = \int_0^1 f(t^2)g(t^2) dt$ в $L^2(0, 1)$;

- $s(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 y_n^2$ в ℓ^2 ;
- $s(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n y_n}{n}$ в ℓ^2 ;
- $s(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n}} x_n y_n$ в ℓ^2 ;

- $s(f, g) = \int_a^b f'(t)g'(t) dt$ в $H^1(a, b)$;

- $s(f, g) = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ в $H^1(0, 1)$.

- Является ли функционал $s(f, g) = \left(\int_{-1}^0 f(x) dx\right) \left(\int_{-1}^0 g(x) dx\right) + \int_0^1 f(x)g(x) dx$ скалярным произведением в $C[-1, 1]$?

- Является ли функционал $s(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1} y_{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_{2n} + \frac{x_{2n-1}}{2n-1}\right) \left(y_{2n} + \frac{y_{2n-1}}{2n-1}\right)$ скалярным произведением в ℓ^2 ?

- Пользуясь непосредственно определением выпуклости, докажите, что функция $y = x^4$ выпукла на всей числовой прямой, а функция $y = 1/x^2$ выпукла на множестве $(0, +\infty)$.

10. $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Покажите, что линейный функционал $J(u) = \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}$, $c \in \mathbb{H}$ является слабо непрерывным, и, как следствие слабо полунепрерывным снизу, непрерывным, полунепрерывным снизу на всем пространстве $\mathbb{H}$.

11. $\mathbb{H}, \mathbb{F}$ – гильбертовы пространства. Покажите, что квадратичный функционал типа невязки $J(u) = \|Au - f\|_{\mathbb{F}}^2$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$, является выпуклым, непрерывным, полунепрерывным снизу и слабо полунепрерывным снизу на всем пространстве $\mathbb{H}$.

12. $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Покажите, что квадратичный функционал общего вида $J(u) = \langle Au, u \rangle_{\mathbb{H}}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, является непрерывным и полунепрерывным снизу на всем пространстве $\mathbb{H}$. Докажите, что достаточным условием слабой полунепрерывности снизу этого функционала на всем пространстве $\mathbb{H}$ является неотрицательная определенность оператора A , то есть выполнение условия $\langle Au, u \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0 \forall u \in \mathbb{H}$.

13. Исследуйте на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую полунепрерывность снизу и слабую непрерывность на пространстве $L^2(0, 1)$ функционалы:

$$\begin{aligned} \text{а) } J(u) &= \int_0^1 u(t) dt; & \text{б) } J(u) &= \left(\int_0^1 u(t) dt \right)^4; & \text{в) } J(u) &= \left(\int_0^1 u(t) dt \right)^3; \\ \text{г) } J(u) &= \int_0^1 u(t)u(1-t) dt; & \text{д) } J(u) &= \int_0^1 u(t)u(\sqrt{t}) dt; & \text{е) } J(u) &= \int_0^1 u(t) \int_0^t u(s) ds dt; \\ \text{ж) } J(u) &= \int_0^1 u^2(t) \sin t dt; & \text{з) } J(u) &= \int_0^1 u^2(t) \cos t dt; \\ \text{и) } J(u) &= \int_0^{1/2} u^2(t) dt; & \text{к) } J(u) &= \int_0^1 u^2(\sqrt{t}) dt; & \text{л) } J(u) &= \int_0^1 \left(\int_0^t u(s) ds \right)^2 dt; \end{aligned}$$

14. Исследуйте на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую полунепрерывность снизу и слабую непрерывность на пространстве ℓ^2 функционалы:

$$\begin{aligned} \text{а) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}; & \text{б) } J(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n} \right)^3; & \text{в) } J(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{2n}}{n} \right)^4; \\ \text{г) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2; & \text{д) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{x_{2n-1}}{2n-1} \right)^2; & \text{е) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2; \\ \text{ж) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n x_{n+1}; & \text{з) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x_n}{n^4} \sum_{k=1}^n x_k \right). \end{aligned}$$

15. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ задано непустое множество

$$U = \{u \in \mathbb{H} : g_1(u) \leq 0, g_2(u) \leq 0, \dots, g_m(u) \leq 0\}.$$

Докажите, что:

- а) если все функционалы $g_i(u)$ полунепрерывны снизу на $\mathbb{H}$, то множество U замкнуто;
- б) если все функционалы $g_i(u)$ слабо полунепрерывны снизу на $\mathbb{H}$, то множество U слабо замкнуто;
- в) если все функционалы $g_i(u)$ выпуклы на $\mathbb{H}$, то множество U выпукло.

16. Исследуйте на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую компактность, компактность следующие множества:

- а) $U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : 1 \leq \int_0^1 tu(t) dt \leq 2 \right\};$
- б) $U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 tu^2(t) dt \leq 4 \right\};$
- в) $U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 e^t u^2(t) dt \leq 2014 \right\};$
- г) $U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : 1 \leq \int_0^1 u(t)u(1-t) dt \leq 4 \right\};$
- д) $U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : -2 \leq \int_0^1 u(t) \int_0^{t^4} u(s) ds dt \leq -1 \right\};$
- е) $U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 \left(\int_0^t u(s) ds \right)^2 dt \leq 1 \right\};$
- ж) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : -2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n} \leq 1 \right\};$
- з) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : 1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2 \leq 5 \right\};$
- и) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : -3 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n x_{2n} \leq 5 \right\};$
- к) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n^2}{n} \leq 1 \right\};$
- л) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{n}} x_n^2 \leq 1 \right\};$
- м) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : |x_n| \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \right\};$
- н) $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1} + x_{n+2})^2 \leq 1 \right\};$

17. Проверить, применим ли какой-либо из приведенных вариантов теоремы Вейерштрасса, а также найти J_* и U_* в задачах:

а) $J(u) = u^2 \rightarrow \inf_{u \in U}, U = (0, 1]$ или $U = (-1, 1);$

б) $J(u) = \int_{-1}^0 u(t) dt - \int_0^1 u(t) dt \rightarrow \inf_{u \in U}, U = \{u = u(t) \in C[-1, 1] : \|u\|_{C[-1, 1]} \leq 1\};$

$$\text{в) } J(u) = \int_{-1}^1 u^2(t) - \frac{3t^4}{\sqrt{2}} u(t) dt \rightarrow \inf_{u \in U}, U = \{u = u(t) \in L^2(-1, 1) : \|u\|_{L^2(-1,1)} \leq 1\};$$

$$\text{г) } J(x) = \|x\|_{\ell^2}^2 \rightarrow \inf_{x \in X}, X = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x_n^2 \geq 1 \right\};$$

$$\text{д) } J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n x_{n+2} \rightarrow \inf_{x \in X}, X = \{x \in \ell^2 : \|x\|_{\ell^2}^2 \leq 1\}.$$

18. Исследуйте на наличие внутренних точек, выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую компактность, компактность следующие множества:

$$\text{а) } U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : v(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} u(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} w(t), v(t), w(t) \in L^2(0, 1) \right\};$$

$$\text{б) } U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \left(\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} u(t) dt \right)^2 \leq 1 \right\};$$

$$\text{в) } X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : 0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq 6 \right\};$$

$$\text{г) } X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq 1 \right\}.$$

19. Исследуйте в зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^1$ на непустоту, выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую компактность, компактность следующие множества:

$$\text{а) } U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 (u(t) - t^2)^2 dt \leq \lambda \left(\int_0^1 tu(t) dt \right)^2 \right\};$$

$$\text{б) } U = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{2^n} \right)^2 \leq \lambda \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n} \right)^2 \right\}.$$

2 Элементы дифференциального исчисления.

2.1 Дифференцируемость по Фреше.

Определение. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – нормированные пространства. Отображение $F(x)$, действующее из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ и определенное в окрестности $O(x_0, \gamma) = \{x \in \mathbb{X} : \|x - x_0\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma\}$ точки $x_0 \in \mathbb{X}$, называется дифференцируемым по Фреше в точке x_0 , если справедливо представление

$$F(x_0 + y) - F(x_0) \stackrel{\mathbb{Y}}{=} Ay + \alpha(x_0, y) \quad \forall y : \|y\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma,$$

где A – линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, а $\lim_{\|y\|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x_0, y)\|_{\mathbb{Y}}}{\|y\|_{\mathbb{X}}} = 0$.

Оператор A называется производной по Фреше отображения $F(x)$ в точке x_0 и обозначается $F'(x_0)$.

Для функционалов, действующих из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ в пространство $\mathbb{R}^1$, приведенное выше определение можно несколько видоизменить. Их производные являются линейными ограниченными операторами, действующими из пространства $\mathbb{H}$ в пространство $\mathbb{R}^1$, то есть эти производные есть элементы пространства $\mathbb{H}^*$. Однако, по теореме Рисса, $\mathbb{H} \cong \mathbb{H}^*$, то есть каждому элементу $h^* \in \mathbb{H}^*$ взаимно однозначно соответствует элемент $h \in \mathbb{H}$ такой, что $h^*u = \langle h, u \rangle_{\mathbb{H}} \forall u \in \mathbb{H}$. С учетом этого, дадим такое

Определение. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Функционал $J(u)$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ и определенный в окрестности $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} : \|u - u_0\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma\}$ точки $u_0 \in \mathbb{H}$ называется дифференцируемым по Фреше в точке u_0 , если справедливо представление

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = \langle a, h \rangle_{\mathbb{H}} + \alpha(u_0, h) \quad \forall h : \|h\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma,$$

где $a \in \mathbb{H}$, $a \lim_{\|h\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0} \frac{\alpha(u_0, h)}{\|h\|_{\mathbb{H}}} = 0$.

Элемент a будем называть **градиентом** функционала $J(u)$ в точке u_0 и обозначать стандартно: $J'(u_0) = a$.

При этом надо понимать, что производная по Фреше $J'(u_0)$ есть линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу $J'(u_0)h = \langle a, h \rangle_{\mathbb{H}}$.

Замечание. Производная по Фреше обладает классическими свойствами:

1. Если отображение $F(x)$ дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , то его производная по Фреше $F'(x_0)$ определяется однозначно;

2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – два дифференцируемых по Фреше в точке x_0 отображения, действующих из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, то отображение $F(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$) также дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , причем $F'(x_0) = \alpha F_1'(x_0) + \beta F_2'(x_0)$.

Теорема. (О дифференцировании сложного отображения)

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ – нормированные пространства, $O(x_0, \gamma_1)$ – окрестность точки $x_0 \in \mathbb{X}$, отображение F отображает $O(x_0, \gamma_1)$ в $\mathbb{Y}$, $y_0 = F(x_0)$, $O(y_0, \gamma_2)$ – окрестность точки y_0 , отображение G отображает $O(y_0, \gamma_2)$ в $\mathbb{Z}$. Тогда если отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , а отображение G дифференцируемо по Фреше в точке y_0 , то сложное отображение GF дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , причем $(GF)'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$.

Определение. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – нормированные пространства, отображение $F(x)$ действует из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ и дифференцируемо по Фреше в окрестности $O(x_0, \gamma) = \{x \in \mathbb{X} : \|x - x_0\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma\}$ точки x_0 . Говорят, что отображение $F(x)$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , если отображение $F'(x)$ дифференцируемо по Фреше в точке x_0 , то есть существует линейный ограниченный оператор B , действующий из $\mathbb{X}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y})$, такой, что

$$F'(x_0 + y) - F'(x_0) \stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y})}{=} By + \beta(x_0, y) \quad \forall y : \|y\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma, \quad \lim_{\|y\|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0} \frac{\|\beta(x_0, y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y})}}{\|y\|_{\mathbb{X}}} = 0.$$

Оператор B называется второй производной по Фреше отображения $J(u)$ в точке u_0 и обозначается $J''(u_0)$.

Замечание. Вторая производная по Фреше является симметричным оператором, то есть $(F''(x_0)y)z = (F''(x_0)z)y \quad \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall y, z \in \mathbb{X}$.

Для случая, когда $\mathbb{X}$ – гильбертово, а $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^1$, с учетом того, что $\mathcal{L}(\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^1) = \mathbb{X}^* \cong \mathbb{X}$, трансформируем это определение следующим образом:

Определение. Пусть функционал $J(u)$ действует из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ и дифференцируем по Фреше в окрестности $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} : \|u - u_0\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma\}$ точки u_0 . Говорят, что $J(u)$ **дважды дифференцируем по Фреше** в точке u_0 , если отображение $J'(u)$ дифференцируемо по Фреше в точке u_0 , то есть существует линейный ограниченный оператор B , действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, такой, что приращение **градиента** $J'(u_0)$ представимо в виде

$$J'(u_0 + h) - J'(u_0) \stackrel{\mathbb{H}}{=} Bh + \beta(u_0, h) \quad \forall h : \|h\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma, \quad \lim_{\|h\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0} \frac{\|\beta(u_0, h)\|_{\mathbb{H}}}{\|h\|_{\mathbb{H}}} = 0.$$

Оператор B будем называть **гессианом** функционала $J(u)$ в точке u_0 и обозначать стандартно: $J''(u_0) = B$.

При этом следует понимать, что вторая производная по Фреше $J''(u_0)$ есть линейный ограниченный оператор B , действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}^*$, причем $(J''(u_0)h)g = \langle Bh, g \rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall h, g \in \mathbb{H}$.

Теорема. (Формула Тейлора для произвольного отображения)

Пусть отображение $F(x)$, действующее из нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$, определено и дважды дифференцируемо по Фреше в шаре $O(x_0, \gamma) = \{x \in \mathbb{X} : \|x - x_0\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma\}$, причем отображение $F''(x)$ непрерывно в точке x_0 . Тогда справедлива формула Тейлора

$$F(x_0 + y) - F(x_0) = F'(x_0)y + \frac{1}{2}(F''(x_0)y)y + o(\|y\|_{\mathbb{X}}^2) \quad \forall y : \|y\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma.$$

Теорема. (Формула Тейлора для функционала)

Пусть функционал $J(u)$ определен и дважды дифференцируем по Фреше в шаре $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} : \|u - u_0\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma\}$. Тогда справедлива формула Тейлора

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = \langle J'(u_0), h \rangle_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2}\langle J''(u_0)h, h \rangle_{\mathbb{H}} + o(\|h\|_{\mathbb{H}}^2) \quad \forall h : \|h\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma,$$

где $J'(u_0)$ и $J''(u_0)$ – градиент и гессиан функционала $J(u)$ в точке u_0 соответственно.

Теорема. (Необходимые условия экстремума)

Пусть функционал $J(u)$ определен на банаховом пространстве $\mathbb{B}$, а $J_* = \inf_{u \in \mathbb{B}} J(u) = J(u_*)$.

Если $J(u)$ дифференцируем по Фреше в точке u_* , то $J'(u_*) \stackrel{\mathbb{B}^*}{=} \Theta$.

Если, кроме того, $J(u)$ дважды дифференцируем по Фреше в точке u_* , то необходимо выполняется ещё и условие $(J''(u_*)b)b \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{B}$.

В отличие от конечномерного случая, условие $\langle J''(u_*)b, b \rangle_{\mathbb{B}} \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{B}$ **не является достаточным**.

20. $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Покажите, что градиент и гессиан линейного функционала $J(u) = \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}$, $c \in \mathbb{H}$ вычисляются по формулам $J'(u) \equiv c$, $J''(u) \equiv \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

21. $\mathbb{H}, \mathbb{F}$ – гильбертовы пространства. Покажите, что градиент и гессиан квадратичного функционала типа невязки $J(u) = \|\mathcal{A}u - f\|_{\mathbb{F}}^2$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$, вычисляются по формулам $J'(u) = 2\mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - f)$, $J''(u) \equiv 2\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

22. $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Покажите, что градиент и гессиан квадратичного функционала общего вида $J(u) = \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathbb{H}}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, вычисляются по формулам $J'(u) = (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)u$, $J''(u) \equiv \mathcal{A} + \mathcal{A}^*$.

23. Вычислите градиент и гессиан, найдите первую и вторую производные по Фреше во всех точках пространства $L^2(0, 1)$ следующих функционалов:

$$\begin{aligned} \text{а) } J(u) &= \left(\int_0^1 u(t) dt \right)^2; & \text{б) } J(u) &= \int_0^{1/2} u^2(t) dt; & \text{в) } J(u) &= \int_0^1 \left(\int_0^{t^3} u(s) ds \right)^2 dt; \\ \text{г) } J(u) &= \int_0^1 tu(t) \int_0^t u(s) ds dt; & \text{д) } J(u) &= \int_0^1 u(t)u(\sqrt{t}) dt; & \text{е) } J(u) &= \int_0^1 u\left(\frac{t+1}{2}\right)u\left(\frac{2t+1}{3}\right) dt. \end{aligned}$$

24. Вычислите градиент и гессиан, найдите первую и вторую производные по Фреше во всех точках пространства ℓ^2 следующих функционалов:

$$\begin{aligned} \text{а) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} x_n; & \text{б) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2; & \text{в) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n x_{n+1}; \\ \text{г) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n x_k \right); & \text{д) } J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n+1} \cdot \left(x_{2n} - \frac{x_{2n-1}}{2} \right). \end{aligned}$$

25. Исследуйте определенные на гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ функционалы на дифференцируемость и дважды дифференцируемость по Фреше, вычислите их градиент и гессиан:

$$\begin{aligned} \text{а) } J(u) &= \|u\|_{\mathbb{H}}^p; & \text{б) } J(u) &= \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}^p, c \in \mathbb{H}, c \neq \Theta_{\mathbb{H}}; & \text{в) } J(u) &= \sin^p(\|u\|_{\mathbb{H}}); \\ \text{г) } J(u) &= \langle Au, u \rangle_{\mathbb{H}}^4, A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}); & \text{д) } J(u) &= \|Au - f\|_{\mathbb{F}}^4, A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{F}), f \in \mathbb{F}; \\ \text{е) } J(u) &= \|u - \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} c\|^3, c \in \mathbb{H}; & \text{ж) } J(u) &= \|\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} u - u_0\|^2, c, u_0 \in \mathbb{H}, c \neq \Theta_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

26. Вычислите градиент и гессиан функционала $J(u) = \int_0^1 \int_0^t u(s) ds dt$, определенного на пространстве $L^2(0, 1)$.

27. Вычислите градиент и гессиан функционала $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k$, определенного на пространстве ℓ^2 .

28. Покажите, что функционал $J(u) = u(1)$ не дифференцируем по Фреше ни в одной точке пространства $L^2(0, 2)$.

29. Покажите, что определенный на банаховом пространстве $L^1(0, 1)$ функционал

$$J(u) = \|u\|_{L^1(0,1)}^2 = \left(\int_0^1 |u(t)| dt \right)^2$$

не дифференцируем по Фреше ни в одной его точке.

30. Докажите, что функционал $J(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{n^2} u(t) dt \right)^2$ определен и дифференцируем по Фреше на всем пространстве $L^2(0, 1)$. Найдите его градиент в точке $u(t) \equiv 1$.

31. С помощью необходимых и достаточных условий минимума решите следующие задачи минимизации:

$$\text{а) } J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n^2} \rightarrow \inf_{x \in \ell^2};$$

$$\text{б) } J(u) = \int_0^{\pi} (u(t) - \sin t)^2 dt + \left(\int_0^{\pi} u(t) \cos t dt\right)^2 \rightarrow \inf_{u \in L^2(0, \pi)};$$

$$\text{в) } J(u) = \int_{-1}^1 (u(t) - t)^2 dt + \int_{-1}^1 (u(t) - t^2)^2 dt + \left(\int_{-1}^1 t^2 u(t) dt\right)^2 \rightarrow \inf_{u \in L^2(-1, 1)};$$

$$\text{г) } J(x) = (x_1 - 1)^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(x_n + x_{n-1} - \frac{1}{n}\right)^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n^2} \rightarrow \inf_{x \in \ell^2}.$$

3 Выпуклость и строгая выпуклость.

3.1 Критерии выпуклости и сильной выпуклости.

Определение. Множество U из линейного пространства $\mathbb{L}$ называется **выпуклым**, если выполнено условие

$$\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0, 1].$$

Это определение можно трактовать следующим образом: отрезок, соединяющий две произвольные точки множества U целиком содержится в этом множестве.

Определение. Функционал $J(u) : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется **выпуклым** [вогнутым] на выпуклом множестве U из линейного пространства $\mathbb{L}$, если выполнено условие

$$J(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq [\geq] \alpha J(u_1) + (1 - \alpha)J(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0, 1].$$

Определение. Функционал $J(u) : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется **строго выпуклым** [строго вогнутым] на выпуклом множестве U из линейного пространства $\mathbb{L}$, если выполнено условие

$$J(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) < [>] \alpha J(u_1) + (1 - \alpha)J(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in (0, 1).$$

Определение. Функционал $J(u) : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется **сильно выпуклым** на выпуклом множестве U из линейного нормированного пространства $\mathbb{H}$, если существует такое положительное число κ , что выполнено условие

$$J(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha J(u_1) + (1 - \alpha)J(u_2) - \frac{\kappa}{2} \alpha(1 - \alpha) \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0, 1].$$

Максимальное из чисел κ , обеспечивающих выполнение этого условия, называют константой сильной выпуклости функционала $J(u)$.

Замечание. Если функционал является выпуклым (строго выпуклым) [сильно выпуклым] на каком-то выпуклом множестве, то он является выпуклым (строго выпуклым) [сильно выпуклым] и на любом выпуклом подмножестве этого множества.

Замечание. Из сильной выпуклости функционала на некотором множестве вытекает его строгая выпуклость на этом множестве, а из строгой выпуклости вытекает обычная выпуклость.

Теорема. (Критерии выпуклости)

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве U из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ функционал $J(u)$ являлся на нем выпуклым (строго выпуклым), необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий:

1. $J(u) \geq (>)J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in U,$
2. $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_{\mathbb{H}} \geq (>)0 \quad \forall u, v \in U.$

Если же функционал $J(u)$ является дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше на выпуклом множестве U с непустой внутренностью из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, то его выпуклость (строгая выпуклость) на этом множестве эквивалентна выполнению условия $\langle J''(u)h, h \rangle_{\mathbb{H}} \geq (>)0 \quad \forall u \in U, h \in \mathbb{H}.$

Теорема. (Критерии сильной выпуклости)

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве U из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ функционал $J(u)$ являлся на нем сильно выпуклым, необходимо и достаточно существование такого положительного числа μ , что выполнено одно из двух условий:

1. $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\mu}{2} \|u - v\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u, v \in U,$
2. $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle_{\mathbb{H}} \geq \mu \|u - v\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u, v \in U.$

Если же функционал $J(u)$ является дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше на выпуклом множестве U с непустой внутренностью из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, то его сильная выпуклость на этом множестве эквивалентна существованию такого положительного числа μ , что выполнено условие $\langle J''(u)h, h \rangle_{\mathbb{H}} \geq \mu \|h\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall u \in U, h \in \mathbb{H}.$

Замечание. Максимальное из чисел μ , обеспечивающих выполнение условий этой теоремы, равно константе сильной выпуклости функционала $J(u)$.

Замечание. По определению первой и второй производной по Фреше, объекты $J'(u)$, $J'(v)$, $J''(u)h$ являются элементами пространства $\mathbb{H}^*$, то есть линейными ограниченными операторами, действующими из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$. В приведенных теоремах выражения $J'(u)$, $J'(v)$, $J''(u)$ трактуются как градиенты и гессиан функционала $J(u)$.

Теорема. (Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов)

Пусть U – замкнутое выпуклое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, функционал $J(u)$ определен, слабо полунепрерывен снизу и является сильно выпуклым с константой сильной выпуклости κ на U . Тогда:

1. $J_* > -\infty,$
2. U_* непусто и состоит из единственного элемента u_* ,
3. Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **сильно** сходится к u_* , причем $\frac{\kappa}{2} \|u_n - u_*\|_{\mathbb{H}}^2 \leq J(u_n) - J(u_*).$

3.2 Проекция на выпуклые замкнутые множества в гильбертовых пространствах.

Определение. Пусть задано метрическое пространство $\mathbb{M}$ и некоторое множество U из этого пространства. Метрической проекцией элемента t на множество U называется такой элемент p множества U , что $\rho(p, t) = \inf_{u \in U} \rho(u, t).$

Метрическую проекцию элемента m на множество U будем обозначать $p = Pr_U(m)$.

Теорема. (Свойства метрической проекции)

Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство, $U \subseteq \mathbb{H}$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для любого элемента h пространства $\mathbb{H}$ существует и единственна его метрическая проекция на множество U ;
2. Оператор проектирования обладает свойством нестрогой сжимаемости, то есть

$$\|Pr_U(h_1) - Pr_U(h_2)\|_{\mathbb{H}} \leq \|h_1 - h_2\|_{\mathbb{H}} \quad \forall h_1, h_2 \in \mathbb{H};$$

3. Элемент p является метрической проекцией элемента h на множество U тогда и только тогда, когда выполняется условие $\langle p - h, u - p \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0 \quad \forall u \in U$ (характеристическое свойство проекции).

3.3 Необходимые и достаточные условия оптимальности.

Теорема. (Критерий оптимальности для выпуклых задач)

Пусть U – выпуклое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а функционал $J(u)$ непрерывно дифференцируем на U .

Тогда если множество $U_* = \{u_* \in U \mid J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u)\}$ непусто, то

$$u_* \in U_* \Rightarrow \langle J'(u_*), u - u_* \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0 \quad \forall u \in U; \quad u_* \in U_* \cap \text{int } U \Rightarrow J'(u_*) \cong \Theta_{\mathbb{H}}.$$

Если, кроме того, функционал $J(u)$ является выпуклым на U , то из условий $u_* \in U$, $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0 \quad \forall u \in U$ вытекает $u_* \in U_*$.

Теорема. (Проекционная форма критерия оптимальности)

Пусть U – выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а функционал $J(u)$ непрерывно дифференцируем на U .

Тогда если множество $U_* = \{u_* \in U \mid J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u)\}$ непусто, то

$$u_* \in U_* \Rightarrow u_* = Pr_U(u_* - \alpha J'(u_*)) \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Если, кроме того, функционал $J(u)$ является выпуклым на U , то из условий $u_* \in U$, $u_* = Pr_U(u_* - \alpha J'(u_*)) \quad \forall \alpha \geq 0$ вытекает $u_* \in U_*$.

32. Исследуйте на выпуклость и сильную выпуклость на указанных множествах (в случае наличия сильной выпуклости укажите константу сильной выпуклости) следующие функции конечного числа переменных:

а) $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R}^1$, $X = (0, +\infty)$; б) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $X = (0, +\infty)$;

в) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $X = (0, +\infty)$; г) $f(x) = -\ln x$, $X = (0, +\infty)$;

д) $f(x) = (x^2 - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $X = (-\infty, +\infty)$; е) $f(x) = (\sin x + 1)^p$, $p > 0$, $X = [-\pi, 0]$;

ж) $f(x) = |\ln x|^p$, $p > 0$, $X_1 = (0, 1]$, $X_2 = [1, +\infty]$, $X_3 = (0, +\infty)$;

з) $J(u) = x^p y^q$, $p, q \in \mathbb{R}^1$, $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$;

и) $J_1(u) = \|Au\|_{\mathbb{R}^2}^2$, $J_2(u) = \langle Au, u \rangle_{\mathbb{R}^2}$, $u = (x, y)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $U = \mathbb{R}^2$.

33. $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Докажите, что линейный функционал $J(u) = \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}$, $c \in \mathbb{H}$ является выпуклым на всем пространстве $\mathbb{H}$, но не является сильно выпуклым ни на каком множестве из $\mathbb{H}$.

34. $\mathbb{H}$, $\mathbb{F}$ – гильбертовы пространства. Докажите, что квадратичный функционал типа невязки $J(u) = \|Au - f\|_{\mathbb{F}}^2$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$ является выпуклым на всем пространстве $\mathbb{H}$.

35. $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Докажите, что квадратичный функционал общего вида $J(u) = \langle Au, u \rangle_{\mathbb{H}} - \langle b, u \rangle_{\mathbb{H}}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $b \in \mathbb{H}$ будет выпуклым на всем пространстве $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда оператор A является неотрицательно определенным, то есть $\langle Au, u \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0 \forall u \in \mathbb{H}$.

36. Исследуйте на выпуклость и сильную выпуклость на всем пространстве $L^2(0, 1)$ функционалы:

а) $J(u) = \int_0^1 \rho(t)u^2(t) dt$, $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$, $\rho(t) \in C[0, 1]$;

б) $J(u) = \int_{1/2}^1 u^2(t) dt$; в) $J(u) = \int_0^1 \left(\int_0^t u(s) ds \right)^2 dt$; г) $J(u) = \int_0^1 u(t)u(1-t) dt$;

37. Исследуйте на выпуклость и сильную выпуклость на всем пространстве ℓ^2 функционалы:

а) $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n}} x_n^2$; б) $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n^2}{n}$; в) $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n x_{n+1}$; г) $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_{2n-1} + 2x_{2n})^2$.

38. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Покажите, что проекция на гиперплоскость

$$U = \{u \in \mathbb{H} : \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} = \alpha\}, \quad c \in \mathbb{H}, c \neq \Theta_{\mathbb{H}}, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

произвольного элемента $h \in \mathbb{H}$ находится по формуле $Pr_U(h) = h - \frac{\langle c, h \rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{\|c\|_{\mathbb{H}}^2} c$. Пользуясь этим результатом, выведите формулы для проектирования на полупространство

$$U = \{u \in \mathbb{H} : \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} \leq \alpha\}, \quad c \in \mathbb{H}, c \neq \Theta_{\mathbb{H}}, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

и слой

$$U = \{u \in \mathbb{H} : \alpha \leq \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} \leq \beta\}, \quad c \in \mathbb{H}, c \neq \Theta_{\mathbb{H}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$$

39. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Покажите, что проекция на шар

$$U = \{u \in \mathbb{H} : \|u - u_0\|_{\mathbb{H}} \leq R\}, \quad u_0 \in \mathbb{H}, R > 0$$

произвольного элемента $h \in \mathbb{H}$ находится по формуле

$$Pr_U(h) = \begin{cases} u_0 + \frac{R}{\|h - u_0\|_{\mathbb{H}}} (h - u_0), & \text{если } \|h - u_0\|_{\mathbb{H}} > R, \\ h, & \text{если } \|h - u_0\|_{\mathbb{H}} \leq R. \end{cases}$$

40. Пусть $L = \text{lin}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$, причем элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют ортогональную систему. Покажите, что проекция на L произвольного элемента $h \in \mathbb{H}$ находится по формуле

$$Pr_L(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle h, e_i \rangle_{\mathbb{H}}}{\|e_i\|_{\mathbb{H}}^2} e_i.$$

41. В гильбертовом пространстве $L^2(0, 1)$ рассматривается n -мерное подпространство L_n , состоящее из кусочно-постоянных функций

$$u(t) \equiv u_i = \text{const} \text{ при } t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

Покажите, что оператор проектирования $Pr_{L_n} : L^2(0, 1) \rightarrow L_n$ действует по правилу

$$Pr_{L_n} u = p(t) = n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} u(s) ds \text{ при } t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

42. В пространстве $L^2(-1, 1)$ найдите проекции на множество

$$U = \left\{ u = u(t) \in L^2(-1, 1) : \int_{-1}^1 tu(t) dt \leq 1, \int_{-1}^1 t^2 u(t) dt \leq 1 \right\}$$

элементов $u_1 = u_1(t) = 5t^2$, $u_2 = u_2(t) = 7t$, $u_3 = u_3(t) \equiv 1$, $u_4 = u_4(t) = 4t^3 + 5t^4$.

43. В пространстве $L^2(0, 1)$ найдите проекции на множество

$$U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 tu(t) dt \leq 0, \int_0^1 u^2(t) dt \leq 1 \right\}$$

элементов $u_1 = u_1(t) = \sin(\pi t)$, $u_2 = u_2(t) = -4t^2$, $u_3 = u_3(t) = e^t$.

44. В пространстве ℓ^2 найдите проекции на множество

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \leq 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

элементов $x_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $x_2 = (0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $x_3 = (-1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

45. Рассматривается линейная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & u = u(t) \in U = \{u = u(t) \in L^2(0, 4) : |u(t)| \overset{\text{п.в.}}{\leq} 1\}, \\ x(0) = 0, & J(u) = \int_0^4 -x(t) + u^2(t) dt \rightarrow \inf_{u \in U}. \end{cases}$$

С помощью критерия оптимальности для выпуклых задач найдите ее решение $u_* = u_*(t)$.

46. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассматривается задача минимизации

$$J(u) = \|u - b\|_{\mathbb{H}}^2 - \langle a, u \rangle_{\mathbb{H}}^2 \rightarrow \inf_{u \in U},$$

$$U = \left\{ u \in \mathbb{H} : \|u - a\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \frac{1}{4} \right\}; \|a\|_{\mathbb{H}} = \|b\|_{\mathbb{H}} = 1, \langle a, b \rangle_{\mathbb{H}} = 0.$$

С помощью критерия оптимальности для выпуклых задач найдите ее решение u_* .

4 Правило множителей Лагранжа. Двойственность.

4.1 Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач.

Рассмотрим следующую постановку задачи минимизации:

$$J(u) \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m\}, \quad (2)$$

где U_0 – выпуклое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а функционалы $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u)$ выпуклы на U_0 . Такую задачу кратко принято называть *выпуклой задачей*.

Введём функцию

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u),$$

называемую *функцией Лагранжа* задачи (2), где $u \in U_0$, а вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ принадлежит множеству

$$\Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}.$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (2) описывает

Теорема. (Куна-Таккера)

Пусть задача (2) выпукла. Тогда, если $u_* \in U_*$, то существует такой набор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \neq \Theta_{\mathbb{R}^{m+1}}$, что

$$1) \min_{u \in U_0} \mathcal{L}(u, \lambda^*) = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*), \text{ (принцип минимума)}$$

$$2) \lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, m, \text{ (неотрицательность множителей Лагранжа)}$$

$$3) \lambda_i^* \cdot g_i(u_*) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \text{ (условия дополняющей нежесткости)}$$

Если для некоторой пары (u_*, λ^*) выполнены соотношения (1), (2), (3), причем $u_* \in U$, $\lambda_0^* \neq 0$, то $u_* \in U_*$.

Случай, когда в соответствующем решению u_* наборе множителей Лагранжа $\lambda_0^* \neq 0$, принято называть *регулярным*. Достаточным условием регулярности является

Теорема. (достаточное условие Слейтера)

Пусть задача (2) является выпуклой, и существует такая точка $u_0 \in U_0$, что $g_i(u_0) < 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда в любом наборе множителей Лагранжа, соответствующем произвольному $u_* \in U_*$, обязательно $\lambda_0^* > 0$.

Наконец, в регулярном случае переформулируем теорему Куна-Таккера в терминах седловой точки.

Определение. Пусть $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$. Точка (x_*, y^*) называется седловой точкой функционала $f(x, y)$ на $X \times Y$, если $f(x_*, y) \leq f(x_*, y^*) \leq f(x, y^*)$ для всех $x \in X, y \in Y$.

Теорема. (седловая форма теоремы Куна-Таккера)

Пусть выполнены все условия теоремы Куна-Таккера, а также выполнено условие регулярности Слейтера. Тогда для того, чтобы точка u_* являлась решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы у классической функции Лагранжа (т.е. функции Лагранжа с $\lambda_0 = 1$) существовала седловая точка вида (u_*, λ^*) на множестве $U_0 \times \mathbb{R}_+^m$.

4.2 Правило множителей Лагранжа для гладких задач.

Рассмотрим следующую постановку:

$$J(u) \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \{u \in \mathbb{H} : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m, g_i(u) = 0, i = m + 1, \dots, m + s\}, \quad (3)$$

функционалы $J(u), g_1(u), \dots, g_{m+s}(u)$ непрерывно дифференцируемы по Фреше на гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Такая задача называется гладкой. Под локальным минимумом мы будем понимать такую точку $u_* \in U$, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$J(u_*) \leq J(u) \quad \forall u \in U \cap U_\varepsilon, \quad U_\varepsilon = \{u \in \mathbb{H} : \|u - u_*\|_{\mathbb{H}} \leq \varepsilon\}.$$

Теорема. (необходимые условия локального минимума)

Пусть u_* – точка локального минимума в задаче (3), функционалы $J(u), g_1(u), \dots, g_{m+s}(u)$ непрерывно дифференцируемы по Фреше в окрестности U_ε точки u_* . Тогда существует такой набор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{m+s}^*) \neq \Theta_{\mathbb{R}^{m+s+1}}$, что

- 1) $\mathcal{L}'_u(u_*, \lambda^*) = \lambda_0^* J'(u_*) + \sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i^* g'_i(u_*) = \Theta_{\mathbb{H}}$, (стационарность функции Лагранжа)
- 2) $\lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, m$, (неотрицательность множителей Лагранжа для неравенств)
- 3) $\lambda_i^* \cdot g_i(u_*) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$. (условия дополняющей нежёсткости для неравенств)

Как и в предыдущем пункте, сформулируем достаточные условия регулярности для задачи (3).

Теорема. Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, и, кроме того, оператор $G'(u_*)$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^s$ по правилу $G'(u_*)h = (\langle g'_{m+1}(u_*), h \rangle_{\mathbb{H}}, \dots, \langle g'_{m+s}(u_*), h \rangle_{\mathbb{H}})$ обладает свойствами:

- 1) $\text{Im } G'(u_*) = \mathbb{R}^s$,
- 2) $\exists h \in \text{Ker } G'(u_*)$ такой, что $\langle g'_i(u_*), h \rangle_{\mathbb{H}} < 0, i = 1, 2, \dots, m$,

то в любом наборе множителей Лагранжа, соответствующем u_* , $\lambda_0^* > 0$.

Замечание: Если в постановке задачи (3) нет ограничений-неравенств, то достаточным условием регулярности будет условие $\text{Im } G'(u_*) = \mathbb{R}^s$. В случае, когда отсутствуют ограничения-равенства, достаточным условием регулярности будет условие $\exists h \in \mathbb{H}$ такой, что $\langle g'_i(u_*), h \rangle_{\mathbb{H}} < 0, i = 1, 2, \dots, m$.

4.3 Двойственные экстремальные задачи.

Будем рассматривать постановку

$$J(u) \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \{u \in U_0 \subseteq \mathbb{H} : g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m, g_i(u) = 0, i = m + 1, \dots, m + s\}, \quad (4)$$

и запишем для этой задачи классическую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0, \lambda \in \Lambda^0 = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+s}) : \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = \sup_{\lambda \in \Lambda^0} \mathcal{L}(u, \lambda) = \begin{cases} J(u), & u \in U, \\ +\infty, & u \in U_0 \setminus U. \end{cases}$$

Ясно, что задача (4) эквивалентна задаче минимизации $\varphi(u) \rightarrow \inf_{u \in U_0}$, то есть

$$\varphi_* = \inf_{u \in U_0} \varphi(u) = J_* = \inf_{u \in U} J(u), \quad U_{0*} = \{u \in U_0 \mid \varphi(u) = \varphi_*\} = U_*.$$

Формально меняя порядок взятия максимума по λ и минимума по u функции Лагранжа, мы приходим к задаче

$$\Psi(\lambda) = \inf_{u \in U_0} \mathcal{L}(u, \lambda) \rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda^0},$$

называемую **двойственной** к (4). Обозначим $\Psi^* = \sup_{\lambda \in \Lambda^0} \Psi(\lambda)$, $\Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda^0 : \Psi(\lambda) = \Psi^*\}$. Связь между исходной и двойственной к ней задачами описывает

Теорема. (о свойствах решений двойственных задач)

Всегда имеют место неравенства $\Psi(\lambda) \leq \Psi^* \leq \varphi_* \leq \varphi(u) \quad \forall \lambda \in \Lambda^0, u \in U_0$.

Для того, чтобы выполнялось $\Psi^* = \varphi_* = J_*$, $U_* \neq \emptyset$, $\Lambda^* \neq \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы классическая функция Лагранжа $\mathcal{L}(u, \lambda)$ имела седловую точку на множестве $U_0 \times \Lambda^0$. При этом множество всех её седловых точек совпадает с множеством $U_* \times \Lambda^*$.

47. В пространстве ℓ^2 рассматривается задача минимизации

$$J(x) = (x_1 + 6)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 2)^2 + \sum_{k=4}^{+\infty} x_k^2 \rightarrow \inf_{x \in X},$$

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \|x\|_{\ell^2} \leq 3, x_1 + x_2 \geq 0\}.$$

Будет ли эта задача выпуклой? Регулярной? Решите ее с помощью правила множителей Лагранжа.

48. В пространстве $L^2(0, \pi)$ рассматривается задача минимизации

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi u(t)u(\pi - t) dt - \int_0^\pi u(t) \cos t dt \rightarrow \inf_{u \in U},$$

$$U = \left\{ u \in L^2(0, \pi) : \int_0^\pi u(t) \sin t dt \leq \pi, \|u\|_{L^2(0, \pi)}^2 = 4\pi \right\}.$$

Будет ли эта задача выпуклой? Регулярной? Решите ее с помощью правила множителей Лагранжа.

49. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассматривается задача минимизации

$$J(u) = \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \{u \in \mathbb{H} \mid \langle Au, u \rangle_{\mathbb{H}} \leq R^2\},$$

где $c \in \mathbb{H}$, $c \neq \Theta_{\mathbb{H}}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $A = A^* > 0$, $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $R > 0$. Выпишите двойственную к ней задачу, с ее помощью решите исходную задачу.

5 Ответы, указания к решениям.

5.1 Теоремы Вейерштрасса.

2. Будет, покажите, что последовательность, фундаментальная в новых метриках, будет также фундаментальной и в новой метрике.
3. а) является нормой, полноты не будет; б) не является нормой; в) не является нормой; г) является нормой, полноты не будет; д) не является нормой.
4. Не является.
5. Является.
6. а) не является скалярным произведением; б) является скалярным произведением, полноты не будет; в) не является скалярным произведением; г) является скалярным произведением, полноты не будет; д) является скалярным произведением, полнота сохранится.
7. Не является.
8. Является.
13. а) В, Н, ПН/С, СПН/С, СН; б) В, Н, ПН/С, СПН/С, СН; в) не В, Н, ПН/С, СПН/С, СН; г) не В, Н, ПН/С, не СПН/С, не СН; д) не В, Н, ПН/С, не СПН/С, не СН; е) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; ж) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; з) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; и) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; к) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; л) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН.
14. а) В, Н, ПН/С, СПН/С, СН; б) не В, Н, ПН/С, СПН/С, СН; в) В, Н, ПН/С, СПН/С, СН; г) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; д) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; е) В, Н, ПН/С, СПН/С, не СН; ж) не В, Н, ПН/С, не СПН/С, не СН; з) не В, Н, ПН/С, не СПН/С, не СН.
16. а) В, З, не О, не СК, не К; б) В, З, не О, не СК, не К; в) В, З, О, СК, не К; г) не В, З, не О, не СК, не К; д) не В, З, не О, не СК, не К; е) В, З, не О, не СК, не К; ж) В, З, не О, не СК, не К; з) В, З, не О, не СК, не К; и) не В, З, не О, не СК, не К; к) В, З, не О, не СК, не К; л) В, З, О, СК, не К; м) В, З, О, СК, К; н) В, З, не О, не СК, не К.
17. а) не применим, $J_* = 0, U_* = \emptyset, J_* = 0, U_* = \{0\}$; б) не применим, $J_* = -2, U_* = \emptyset$; в) применим слабый вариант, $J_* = -\frac{1}{4}, U_* = \{\frac{3t^4}{2\sqrt{2}}\}$; г) не применим, $J_* = 0, U_* = \emptyset$; д) не применим, $J_* = -1, U_* = \emptyset$.
18. а) не имеет внутренних точек, В, З, О, СК, не К; б) не имеет внутренних точек, В, не З, не О, не СК, не К; в) не имеет внутренних точек, В, не З, не О, не СК, не К; г) не имеет внутренних точек(?), В, З(?), О, СК(?), не К;
19. а) при $\lambda < 0$ множество пусто, при $\lambda = 0$ множество состоит из одной точки $u = t^2$, при $0 < \lambda < 3$ В, З, О, СК, не К, при $\lambda \geq 3$ В, З, не О, не СК, не К; б) а) при $\lambda < 0$ множество пусто, при $\lambda = 0$ множество состоит из одной точки $x = (1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n, \dots)$, при $0 < \lambda < 8$ В, З, О, СК, не К, при $\lambda \geq 8$ В, З, не О, не СК, не К;

5.2 Элементы дифференциального исчисления.

23. а) $J'(u) = (J'(u))(t) \equiv 2 \int_0^1 u(t) dt, J''(u) \equiv \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}h = \mathcal{D}h(t) \equiv 2 \int_0^1 h(t) dt$;
- б) $J'(u) = (J'(u))(t) = \begin{cases} 2u(t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}, J''(u) \equiv \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}h = \mathcal{D}h(t) = \begin{cases} 2h(t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$;
- в) $J'(u) = (J'(u))(t) = 2 \int_{\sqrt[3]{t}}^1 \int_0^{s^3} u(\tau) d\tau ds, J''(u) \equiv \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}h = \mathcal{D}h(t) = 2 \int_{\sqrt[3]{t}}^1 \int_0^{s^3} h(\tau) d\tau ds$;

$$\begin{aligned} \text{r)} \quad J'(u) &= (J'(u))(t) = t \int_0^1 u(s) ds + \int_t^1 \int_s^1 u(\tau) d\tau ds, \\ J''(u) &\equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = \mathcal{D}h(t) = t \int_0^1 h(s) ds + \int_t^1 \int_s^1 h(\tau) d\tau ds \end{aligned};$$

$$\text{д)} J'(u) = (J'(u))(t) = u(\sqrt{t}) + 2tu(t^2), J''(u) \equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = \mathcal{D}h(t) = h(\sqrt{t}) + 2th(t^2);$$

$$\text{е)} J'(u) = (J'(u))(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/3, \\ \frac{3}{2}u(\frac{3t+1}{4}), & 1/3 < t < 1/2, \\ \frac{3}{2}u(\frac{3t+1}{4}) + 2u(\frac{4t-1}{3}), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$J''(u) \equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = \mathcal{D}h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/3, \\ \frac{3}{2}h(\frac{3t+1}{4}), & 1/3 < t < 1/2, \\ \frac{3}{2}h(\frac{3t+1}{4}) + 2h(\frac{4t-1}{3}), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases};$$

$$\text{24. а)} J'(x) \equiv (e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}, \dots), J''(x) \equiv \mathcal{O} \in \mathcal{L}(\ell^2 \rightarrow \ell^2);$$

$$\text{б)} J'(x) = (2x_1, 0, 2x_3, 0, \dots, 0, 2x_{2n-1}, 0, \dots), J''(x) \equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = (2h_1, 0, 2h_3, 0, \dots, 0, 2h_{2n-1}, 0, \dots);$$

$$\text{в)} J'(x) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots, x_{n-1} + x_{n+1}, \dots),$$

$$J''(x) \equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = (h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_4, h_3 + h_5, \dots, h_{n-1} + h_{n+1}, \dots);$$

$$\text{г)} J'(x) = \left(x_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k^3}, \frac{x_1 + x_2}{2^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x_k}{k^3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3^3} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x_k}{k^3}, \dots, \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x_k}{k^3}, \dots \right),$$

$$J''(x) \equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = \left(h_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h_k}{k^3}, \frac{h_1 + h_2}{2^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h_k}{k^3}, \dots, \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n h_k + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{h_k}{k^3}, \dots \right);$$

$$\text{д)} J'(x) = \left(-\frac{x_3}{2}, x_3, x_2 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_5}{2}, x_5, x_4 - \frac{x_3}{2} - \frac{x_7}{2}, x_7, \dots, x_{n-1} - \frac{x_{n-2}}{2} - \frac{x_{n+2}}{2}, x_{n+2}, \dots \right);$$

$$J''(x) \equiv \mathcal{D}, \text{ где } \mathcal{D}h = \left(-\frac{h_3}{2}, h_3, h_2 - \frac{h_1}{2} - \frac{h_5}{2}, h_5, h_4 - \frac{h_3}{2} - \frac{h_7}{2}, h_7, \dots, h_{n-1} - \frac{h_{n-2}}{2} - \frac{h_{n+2}}{2}, h_{n+2}, \dots \right).$$

25. а) Если $u \neq \Theta_{\mathbb{H}}$, то при всех p $J'(u) = p\|u\|_{\mathbb{H}}^{p-2}u$, $J''(u) = p(p-2)\mathcal{D}(u) + p\|u\|_{\mathbb{H}}^{p-2}\mathcal{E}$, где $\mathcal{D}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}(u)h = \|u\|_{\mathbb{H}}^{p-4}\langle u, h \rangle_{\mathbb{H}}u$, $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – единичный оператор; при $p \leq 1$ недифференцируем в $u = \Theta_{\mathbb{H}}$, при $p > 1$ $J'(\Theta_{\mathbb{H}}) = \Theta_{\mathbb{H}}$, при $1 < p < 2$ $J''(\Theta_{\mathbb{H}})$ не существует, при $p = 2$ $J''(\Theta_{\mathbb{H}}) = 2\mathcal{E}$, при $p > 2$ $J''(\Theta_{\mathbb{H}}) = \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – нулевой оператор;

б) Если $\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} \neq 0$, то $J'(u) = p\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}^{p-1}c$, $J''(u) = p(p-1)\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}^{p-2}\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}h = \langle c, h \rangle_{\mathbb{H}}c$ при всех p ; если $\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} = 0$ то при $p \leq 1$ $J'(u)$ не существует, при $p > 1$ $J'(u) = \Theta_{\mathbb{H}}$, при $1 < p < 2$ $J''(u)$ не существует, при $p = 2$ $J''(u) = 2\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}h = \langle c, h \rangle_{\mathbb{H}}c$, при $p > 2$ $J''(u) = \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – нулевой оператор;

в) Если $\|u\|_{\mathbb{H}} \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то при любом p $J'(u) = p \sin^{p-1}(\|u\|_{\mathbb{H}}) \cos(\|u\|_{\mathbb{H}}) \frac{u}{\|u\|_{\mathbb{H}}}$, $J''(u) = \frac{p}{\|u\|_{\mathbb{H}}^2} \sin^{p-2}(\|u\|_{\mathbb{H}}) \left(p \cos^2(\|u\|_{\mathbb{H}}) - 1 - \frac{\sin(\|u\|_{\mathbb{H}}) \cos(\|u\|_{\mathbb{H}})}{\|u\|_{\mathbb{H}}} \right) \mathcal{D}(u) + \frac{p}{\|u\|_{\mathbb{H}}} \sin^{p-1}(\|u\|_{\mathbb{H}}) \cos(\|u\|_{\mathbb{H}}) \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}(u)h = \langle u, h \rangle_{\mathbb{H}}u$, $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – единичный оператор; если $\|u\|_{\mathbb{H}} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то при $p \leq 1$ $J'(u)$ не существует, при $p > 1$ $J'(u) = \Theta_{\mathbb{H}}$, при $p < 2$ $J''(u)$ не существует, при $p = 2$ $J''(u) = 2\mathcal{E}$, при $p > 2$ $J''(u) = \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – нулевой оператор;

г) $J(u) \in C^2(\mathbb{H})$, $J'(u) = 4\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathbb{H}}^3 (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)u$, $J''(u) = 4\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathbb{H}}^3 (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) + 12\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathbb{H}}^2 \mathcal{D}(u)$, где $\mathcal{D}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}(u)h = \langle (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)u, h \rangle_{\mathbb{H}} (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)u$;

д) $J(u) \in C^2(\mathbb{H})$, $J'(u) = 4\|\mathcal{A}u - f\|_{\mathbb{H}}^2 \mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - f)$, $J''(u) = 4\|\mathcal{A}u - f\|_{\mathbb{H}}^2 \mathcal{A}^* \mathcal{A} + 8\mathcal{D}(u)$, где $\mathcal{D}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}(u)h = \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - f), h \rangle_{\mathbb{H}} \mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - f)$;

е) $J(u) \in C^2(\mathbb{H})$, $J'(u) = 3\|u - \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}c\|_{\mathbb{H}}(u + (\|c\|_{\mathbb{H}}^2 - 2)\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}c)$, если $u \neq \Theta_{\mathbb{H}}$, то $J''(u) = 3\|u - \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}c\|_{\mathbb{H}}(\mathcal{E} + (\|c\|_{\mathbb{H}}^2 - 2)\mathcal{D}) + \frac{3}{\|u - \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}c\|_{\mathbb{H}}} \mathcal{F}(u)$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – единичный оператор, $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}h = \langle c, h \rangle_{\mathbb{H}}c$, $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{F}(u)h = (\langle u, h \rangle_{\mathbb{H}} + (\|c\|_{\mathbb{H}}^2 - 2)\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}\langle c, h \rangle_{\mathbb{H}})(u + (\|c\|_{\mathbb{H}}^2 - 2)\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}c)$, $J''(\Theta_{\mathbb{H}}) = \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$ – нулевой оператор;

ж) $J(u) \in C^2(\mathbb{H})$, $J'(u) = 2(\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}^2 u + \|u\|_{\mathbb{H}}^2 \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}c - \langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}u_0 - \langle u_0, u \rangle_{\mathbb{H}}c)$, $J''(u) = \mathcal{D}(u)$,

где $\mathcal{D}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H})$, $\mathcal{D}(u)h = 2\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}}^2 h + 4\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} \langle c, h \rangle_{\mathbb{H}} u + 4\langle c, u \rangle_{\mathbb{H}} \langle u, h \rangle_{\mathbb{H}} c + 2\|u\|_{\mathbb{H}}^2 \langle c, h \rangle_{\mathbb{H}} c - 2\langle c, h \rangle_{\mathbb{H}} u_0 - 2\langle u_0, h \rangle_{\mathbb{H}} c$.

26. $J'(u) \equiv 1 - t$, $J''(u) \equiv \mathcal{O} \in \mathcal{L}(L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1))$.

27. $J'(x) \equiv \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \dots, \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \dots \right)$, $J''(u) \equiv \mathcal{O} \in \mathcal{L}(\ell^2 \rightarrow \ell^2)$.

30. $J'(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n^2}}{n^2 + 1} \in L^2(0, 1)$.

31. а) $x_* = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{18}, \dots, \frac{2n-1}{2n^2}, \dots \right)$; б) $u_* = u_*(t) = \sin t$; в) $u_* = u_*(t) = \frac{6t + 5t^2}{12}$;

г) $x_* = (1 + x_1, 1/2 + x_2, 1/3 + x_3, \dots, 1/n + x_n, \dots)$, где $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ – решение системы $2x_1 + x_2 = 1/2$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1/8$, $x_2 + 2x_3 + x_4 = 1/18, \dots, x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1} = 1/2n^2, \dots$

5.3 Выпуклость и строгая выпуклость.

32. а) СВ ($\kappa = 2$) при $p = 2$, В, но не СВ при $p \in (-\infty, 0] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$, не В при $p \in (0, 1)$;

б) В, но не СВ; в) В, но не СВ; г) В, но не СВ; д) СВ ($\kappa = 2$) при $n = 1$, не В при $n \geq 2$;

е) В, но не СВ при $p \geq 1$, не В при $p \in (0, 1)$; ж) на X_1 не В при $0 < p < 1$, В, но не СВ при $p \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$, СВ ($\kappa = 1, \kappa = 2$ соответственно) при $p = 1$ и $p = 2$; на X_2 не В при всех p , на X_3 не В при всех p ;

з) если $p(p-1) \geq 0, q(q-1) \geq 0, pq(1-p-q) \geq 0$, то В, но не СВ, при остальных наборах (p, q) не В; и) $J_1(u)$ В при всех (a, b) , СВ ($\kappa = 2 \min\{(a-b)^2, (a+b)^2\}$), если $|a| \neq |b|$, $J_2(u)$ СВ ($\kappa = 2 \min\{a-b, a+b\}$), если $a > 0, a > |b|$, В, но не СВ, если $a \geq 0, a = |b|$, не В при остальных наборах (a, b) ;

36. а) СВ ($\kappa = 2\rho_0$); б) В, но не СВ, в) В, но не СВ, г) не В;

37. а) СВ ($\kappa = 2$); б) В, но не СВ, в) не В, г) В, но не СВ;

42. $pr_U(u_1) = \frac{5}{2}t^2$, $pr_U(u_2) = \frac{3}{2}t$, $pr_U(u_3) \equiv 1$, $pr_U(u_4) = 4t^3 + 5t^4 - \frac{25}{7}t^2 - \frac{12}{5}t$;

5.4 Правило множителей Лагранжа. Двойственность.

1. Задача выпукла и регулярна, $J_* = 17$, $x_* = (-2, 2, -1, 0, \dots, 0, \dots)$.

2. Задача невыпукла, регулярна, $J_* = -(2 + \sqrt{2})\pi$, $U_* = \{2\sqrt{2} \cos t\}$.

3. Двойственная задача имеет вид $\Psi(\lambda) = -\frac{1}{4\lambda} \langle A^{-1}c, c \rangle_{\mathbb{H}} - \lambda R^2 \rightarrow \sup_{\lambda > 0}$, $\Psi^* = -R\sqrt{\langle A^{-1}c, c \rangle_{\mathbb{H}}} = J_*$.